

1. Korzystając z definicji całki Riemanna obliczyć granice

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.
- (c) $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \right]$.
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \left(\sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^4} + \dots + \sqrt[n]{e^{2n}} \right) \right]$.

2. (a) Samochód od chwili startu poruszał się ruchem jednostannie przyspieszonym z przyspieszeniem $2m/sec^2$. Po czasie $10sek$ zaczął się poruszać ze stałą szybkością. Po dalszych $60sek$ zaczął hamować z opóźnieniem $1m/sec^2$ aż do zatrzymania. Obliczyć średnią szybkość tego samochodu.

(b) Kamień rzucono z wysokości 2 m pionowo do góry z szybkością początkową $5m/sec$. Obliczyć średnią szybkość kamienia od momentu wyrzucenia do momentu upadku. Nie uwzględniać oporu powietrza, przyjmując $g = 10m/sec^2$, (g - przyspieszenie ziemskie).

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego:

- (a) krzywymi $y = x^2, y = 2x + 3$.
- (b) krzywymi $y = x^2, y = 2x^2, y = 8, x \geq 0$.
- (c) krzywymi $y = e^{-x}, y = e^{3x}, y = \sqrt{x}$.
- (d) krzywymi $y = \arctg x, y = \operatorname{arccotg} x$ oraz osią Oy .
- (e) elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

4. Obliczyć długości łuków podanych krzywych.

- (a) $y = \sqrt{1-x^2}, x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.
- (b) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}, x \in \langle 1, 3 \rangle$.
- (c) $y = \arcsin(e^{-x}), x \in \langle 0, 1 \rangle$.
- (d) $y = \ln x, x \in \langle \sqrt{3}, 2\sqrt{2} \rangle$.

5. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu podanych figur T wokół wskazanych osi

(a) $T : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos x, Ox.$

(b) $T; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^{-x}, Oy.$

(c) $T : 1 \leq x \leq e, \ln^2 x \leq y \leq \ln x, Ox.$

(d) $T; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, Ox.$

Odpowiedzi.

1. (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{\pi}{4}$, (c) $\ln 2$, (d) 2 , (e) $\frac{e^2-1}{2}$.

2. (a) $\frac{50}{3}$, (b) $\frac{257,5}{24}$.

3. (a) $\frac{32}{3}$, (b) $\frac{32(\sqrt{2}-1)}{3}$, (c) $\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{e}$, (d) $2 \ln 2$, (e) πab .

4. (a) $\frac{\pi}{6}$, (b) $\frac{181}{9}$, (c) $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$, (d) $1 + \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$.

5. (a) $\frac{1}{2}\pi^2$, (b) $2\pi(1 - \frac{2}{e})$, (c) $\pi(3 - e)$, (d) $\frac{3\pi}{10}$.